1) $\mathcal{B}_1 = \{x+x^2, 1+x, 1+x^2\}$

$\mathcal{B}_2 = \{x^2+x-1, 1+2x^2, 3+x\}$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz cuyas columnas son $(p_1(x))_{\mathcal{B}_2}$, $(p_2(x))_{\mathcal{B}_2}$ y $(p_3(x))_{\mathcal{B}_2}$

siendo $p_1(x) = x+x^2$, $p_2(x) = 1+x$, $p_3(x) = 1+x^2$.

si $p(x) = a + bx + cx^2$

$$p(x) = \alpha(x^2+x-1) + \beta(1+2x^2) + \gamma(3+x)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = (\alpha+2\beta)x^2 + (\alpha+\gamma)x + (-\alpha+\beta+3\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} a &= -\alpha+\beta+3\gamma \\ b &= \alpha+\gamma \\ c &= \alpha+2\beta \end{aligned}$$

entonces para encontrar $(p_i(x))_{\mathcal{B}_2}$ para cada i hay que resolver el sistema

$$A\vec{x} = b_i$$

donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $b_i = (p_i(x))_{\mathcal{B}_1}$

Resolvemos los tres sistemas simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 7/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/9 \\ -2/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/9 \\ 5/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$ son las soluciones.

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2) En este caso debemos reducir A hasta obtener una matriz en forma escalonada reducida B. Las filas de B forman una base del espacio fila de B (y por tanto del espacio fila de A)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_1 + F_3]{F_2 \leftarrow 3\cdot F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftarrow 3F_2]{F_1 \leftarrow 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Todas las op en } \mathbb{Z}_5\text{)}$$

$\mathcal{B} = \{(1,0,4), (0,1,1)\}$ es base del espacio de filas de A.

3) i) Sup. T inyectiva: Como $T\vec{0} = \vec{0}$ por ser T tr. lineal, tenemos $\vec{0} \in \mathrm{Nu}\,T$.

Por otra parte: $\vec{x} \in \mathrm{Nu}\,T \iff T\vec{x} = \vec{0}$

por inyectividad de T: $T\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\therefore \ \mathrm{Nu}\,T = \{\vec{0}\}$

es decir: la nulidad de T es 0

Conocemos la ec. del rango:

$$\text{Nulidad } T + \text{rango } T = \dim V$$

como Nulidad $T = 0$, tenemos rango $T = \dim V$.

ii) Supongamos rango $T = \dim V$:

De nuevo, por la ec. del rango

se sigue Nulidad $T = 0$

i.e. $N_0 T = \{\vec{0}\}$

hay que demostrar que $N_0 T = \{\vec{0}\} \Rightarrow T$ inyectiva.

En efecto si existen $\vec{x}, \vec{y} \in V$

con $T\vec{x} = T\vec{y}$, entonces $T\vec{x} - T\vec{y} = \vec{0}$

luego $T(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$

y por tanto $(\vec{x} - \vec{y}) \in N_0 T$ i.e. $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$.

$\vec{x} = \vec{y}$.

Tenemos entonces que

$T\vec{x} = T\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\therefore T$ es inyectiva. ∎

4) 5) : Ver demostración de cada resultado en los apuntes de clase.